广西民族学院学报（自然科学版)
第4卷第1期 JOURNAL OF GUANGXI UNIVERSITY FOR NATIONALITIES Vol 4 NO. 1
1998年2月 (Natural Science Edition) Feb 1998

伯努利数与判别素数的充要条件*

王云葵
(广西民族学院数学与计算机科学系, 南宁, 530006)

摘 要 根据等幂和与判别素数的充要条件, 获得了伯努利数与判别素数的充要条件, 并利用所得结果对居加猜想进行了讨论, 证明了: 若 $S_{P-1}(P-1)\equiv -1(\bmod p)$ 成立, 则 P 是素数或者 $P=P_1P_2\cdots P_S$ 是绝对伪素数, 并且 $P\|B_{P-1}$ 的分母, $P|(PB_{P-1}+1)$ 的分子; $\frac{P}{P_i}\equiv 1(\bmod P_i)$; $\sum_{i=1}^{s}\frac{1}{P_i}-\frac{1}{P}$ 是整数; 在 $2\le 2m\le(\frac{p}{5}-1)$ 内必存在偶数 $2m$, 使得对每个 P_i 均有 $P_i-1|2m$, $P\|B_{2m}$ 的分母, $P|(PB_{2m}+1)$ 的分子.

关键词 伯努利数 伯努利多项式 居加猜想 等幂和

分类号 O 156

1 等幂和与判别素数的充要条件

怎样判别素数是数学家们颇为关心的问题. 古往今来, 国内外数学家都为寻求素数公式或探讨判别素数的充要条件而费尽心思, 但至今尚未找到一种有效的方法. 1950年居加 (G. Giuga) 猜想[1]: P 为素数的充要条件是

$$1^{P-1}+2^{P-1}+\cdots+(P-1)^{P-1}\equiv -1(\bmod p)$$

根据等幂和 $S_m(n)=\sum_{K=1}^{n}K^m$ 的定义, 居加猜想即为: P 为素数的充要条件是

$$S_{P-1}(P-1)\equiv -1(\bmod p)$$

等幂和与素数的判别密切相关. 1981年康继鼎与周国富在研究居加猜想时证明了

引理1[2] 费尔马数 $F_m=2^{2^m}+1$ 为素数的充要条件是

$$S_{F_m-1}(F_m-1)\equiv -1(\bmod F_m)$$

引理2[3] 默森尼数 $M_P=2^P-1$ (P 为奇素数) 是素数的充要条件是

$$S_{M_P-1}(M_P-1)\equiv -1(\bmod M_p)$$

1993年笔者受数学家陈景润的启示, 获得了等幂和与判别素数的四个充要条件[4]:

引理3 P 为素数的充要条件是, 满足

(1) $P-1|m$ 时, $S_m(p-1)\equiv 0(\bmod P)$

(2) $P-1\nmid m$ 时, $S_m(p-1)\equiv -1(\bmod P)$

引理4 P 为素数的充要条件是, 满足

(1) 对 $1\le m<(P-1)$

有 $S_m(p-1)\equiv 0(\bmod P)$

(2) $S_{P-1}(p-1)\equiv -1(\bmod P)$

引理5 奇数 P 为素数的充要条件是, 满足

(1) 对 $2\le 2m\le(\frac{P}{5}-1)$

有 $S_{2m}(P-1)\equiv 0(\bmod P)$

(2) $S_{P-1}(P-1)\equiv -1(\bmod P)$

引理6 奇数 P 为素数的充要条件是, 满足

(1) 对 $2\le 2m\le(\frac{P}{5}-1)$

有 $S_{2m}(\frac{P-1}{2})\equiv 0(\bmod P)$

(2) $S_{P-1}(P-1)\equiv -1(\bmod P)$

---

* 收稿日期: 1997-02-27. 第一作者: 男, 35岁, 中教一级

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

定理1 m 为自然数, $P\ge 3$ 为奇数, 则

$$S_{2m}(P-1)\equiv 2S_{2m}(\frac{P-1}{2})\pmod P$$

$$S_{P-1}(P-1)\equiv 2S_{P-1}(\frac{P-1}{2})\pmod P$$

证明: 对任何自然数 m 及任何奇数 $P\ge 3$ 均有

$$(P-1)^{2m}\equiv 1^{2m}\pmod P$$

$$(P-2)^{2m}\equiv 2^{2m}\pmod P$$

……

$$(\frac{P+1}{2})^{2m}\equiv(\frac{P-1}{2})^{2m}\pmod P$$

故 $S_{2m}(P-1)=1^{2m}+2^{2m}+\cdots+(\frac{P-1}{2})^{2m}+(\frac{P+1}{2})^{2m}+\cdots+(P-1)^{2m}\equiv 2(1^{2m}+2^{2m}+\cdots+(\frac{P-1}{2})^{2m})\pmod P$

即 $S_{2m}(P-1)\equiv 2S_{2m}(\frac{P-1}{2})\pmod P$

令 $2m=P-1$ 即得

$$S_{P-1}(P-1)\equiv 2S_{P-1}(\frac{P-1}{2})\pmod P$$

定理2 奇数 P 为素数的充要条件是, 满足

(1) 对 $2\le 2m\le(\frac{P}{5}-1)$

有 $S_{2m}(\frac{P-1}{2})\equiv 0\pmod P$

(2) $S_{P-1}(\frac{P-1}{2})\equiv\frac{P-1}{2}\pmod P$

证明: 根据引理5和定理1, 奇数 P 为素数 ⇔

(1) 对 $2\le 2m\le(\frac{P}{5}-1)$ 有 $S_{2m}(P-1)\equiv 0\pmod P$; (2) $S_{P-1}(P-1)\equiv -1\pmod P$ ⇔ (1) 对 $2\le 2m\le(\frac{P}{5}-1)$ 有 $2S_{2m}(\frac{P-1}{2})\equiv 0\pmod P$; (2) $2S_{P-1}(\frac{P-1}{2})\equiv(P-1)\pmod P$ ⇔ (1) 对 $2\le 2m\le(\frac{P}{5}-1)$ 有 $S_{2m}(\frac{P-1}{2})\equiv 0\pmod P$; (2) $S_{P-1}(\frac{P-1}{2})\equiv\frac{P-1}{2}\pmod P$.

完全类似地, 引理1与引理2可改进为

定理3 费尔马数 F_m 为素数的充要条件是

$$S_{F_m-1}(\frac{F_m-1}{2})\equiv\frac{F_{m-1}}{2}\pmod{F_m}$$

定理4 默森尼数 M_P 为素数的充要条件是

$$S_{M_P-1}(\frac{M_P-1}{2})\equiv\frac{M_P-1}{2}\pmod{M_P}$$

2 伯努利数与判别素数的充要条件

伯努利数 B_m 在数论中占有极其重要的地位. 例如数学家库默尔证明了[5]: $P>3$ 为正规素数 ⇔ P 不整除 $B_2, B_4, \cdots, B_{P-3}$ 的每一个数的分子 ⇔ 费尔马大定理成立. 另外, 伯努利数与等幂和[6]、波文猜想[7]及居加猜想[8]等密切相关.

引理7[8,9] m 为自然数, $P\ge 3$ 为奇数, 则

$P\mid(S_{2m}(P-1)-PB_{2m})$ 的分子

$P^2\mid(S_{P-1}(P-1)-PB_{P-1})$ 的分子

定理5 奇数 P 为素数的充要条件是, 满足

(1) 当 $(P-1)\mid 2m$ 时, P 与 B_{2m} 的分母互素;

(2) 当 $(P-1)\mid 2m$ 时, $P\mid(PB_{2m}+1)$ 的分子.

证明: 由引理3和引理7有奇数 P 为素数 ⇔

(1) 当 $(P-1)\mid 2m$ 时, $S_{2m}(P-1)\equiv 0\pmod P$; (2) 当 $(P-1)\mid 2m$ 时, $S_{2m}(P-1)\equiv -1\pmod P$ ⇔ (1) 当 $(P-1)\mid 2m$ 时, $P\mid PB_{2m}$ 的分子; (2) 当 $(P-1)\mid 2m$ 时, $P\mid(PB_{2m}+1)$ 的分子 ⇔ (1) 当 $(P-1)\mid 2m$ 时, P 与 B_{2m} 的分母互素; (2) 当 $(P-1)\mid 2m$ 时. $P\mid(PB_{2m}+1)$ 的分子.

完全类似地, 由引理1, 引理2, 引理5有

定理6 奇数 P 为素数的充要条件是, 满足

(1) 对 $2\le 2m\le(\frac{P}{5}-1)$ 有 P 与 B_{2m} 的分母互素;

(2) $P\mid(PB_{P-1}+1)$ 的分子.

定理7 费尔马数 F_m 为素数的充要条件是,

$F_m\mid(F_mB_{F_m-1}+1)$ 的分子.

定理8 默森尼数 M_P 为素数的充要条件是,

$M_P\mid(M_PB_{M_P-1}+1)$ 的分子.

3 伯努利数与居加猜想

我们已经看到, 定理2～8简化了判别素数的充要条件, 在实际操作中也很方便, 而且, 根据定理1和引理7知, 居加猜想的等价猜想是:

猜想1 奇数 P 为素数的充要条件是

$$S_{P-1}(\frac{P-1}{2})\equiv\frac{P-1}{2}\pmod P$$

猜想2 奇数 P 为素数的充要条件是

$P\mid(PB_{P-1}+1)$ 的分子

引理8[10] m 为自然数, 则对每个素数 P 均有 $P\mid PB_{2m}$ 的分母. 并且, 当且仅当 $(P-1)\mid 2m$ 时, $P\mid(PB_{2m}+1)$ 的分子, $P\parallel B_{2m}$ 的分母.

引理9[8,9] 若 $S_{P-1}(P-1)\equiv -1\pmod P$ 成立, 则 P 为素数或 $P=P_1P_2\cdots P_s$ 为绝对伪素数, 并且对 P 及每个 P_i 均有: $P\parallel B_{P-1}$ 的分母, $P\mid(PB_{P-1}+1)$ 的分子; $\frac{P}{P_i}\equiv 1\pmod{P_i}$, $\frac{P-1}{P_i-1}\equiv 1\pmod{P_i^2}$; $\sum_{i=1}^{s}\frac{1}{P_i}-\frac{1}{P}$ 为整数

定理9 若 $S_{P-1}(P-1)\equiv -1\pmod P$ 成立, 则 P 为素数或 $P=P_1P_2\cdots P_S$ 为绝对伪素数, 并且对 P 及每个 P_i 有

(1) $P\parallel B_{P-1}$ 的分母, $P\mid(PB_{P-1}+1)$ 的分子;

(2) $\frac{P}{P_i}\equiv 1\pmod{P_i}$, $\frac{P-1}{P_i-1}\equiv 1\pmod{P_i^2}$;

(3) $\frac{1}{P_1}+\frac{1}{P_2}+\cdots+\frac{1}{P_s}-\frac{1}{P}$ 为整数;

(4) 在 $2\le 2m\le(\frac{P}{5}-1)$ 内必存在偶数 $2m$, 使得 $P\mid B_{2m}$ 的分母, $P\mid(PB_{2m}+1)$ 的分子, $S_{2m}(P-1)\equiv$

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$-1(\bmod P)$.

证明: 若 $S_{P-1}(P-1)\equiv -1(\bmod P)$, 则由引理9知, P 为素数或 $P=P_1P_2\cdots,P_s$ 为绝对伪素数, 并且(1)～(3)成立, 下证必有(4)成立

因 $P=P_1P_2\cdots,P_s$ 为绝对伪素数, 故 $P>3$ 为奇合数, 由(1)式 $P\mid(PB_{P-1}+1)$ 的分子及定理6, 对 $2\le 2m\le(\frac{P}{5}-1)$ 内必存在 $2m$ 使得 $P\mid B_{2m}$ 的分母, 从而对每个 P_i 均有 $P_i\mid B_{2m}$ 的分母, 从而由引理8, 对每个 P_i 均有 $(P_i-1)\mid 2m$, $P_i\mid(P_iB_{2m}+1)$ 的分子. 又

$$PB_{2m}+1=\frac{P}{P_i}(P_iB_{2m}+1)-(\frac{P}{P_i}-1).$$

于是, 由(2) $P_i\mid(\frac{P}{P_i}-1)$ 及 $P_i\mid(P_iB_{2m}+1)$ 的分子, 对每个 P_i 均有 $P_i\mid(PB_{2m}+1)$ 的分子, 从而 $P\mid(PB_{2m}+1)$ 的分子, 再由引理7, $P\mid(S_{2m}(P-1)-PB_{2m})$ 的分子知, $P\mid(S_{2m}(P-1)+1)$, 即 $S_{2m}(P-1)\equiv -1(\bmod P)$.

参　考　文　献

[1] 王云葵　等幂和与居加猜想　数学通讯, 1992, (11)
[2] 康继鼎, 周国富　关于居加猜测与费尔马数为素数的充要条件. 数学通报, 1981, (12)
[3] 康继鼎, 周国富　关于居加猜测与默森尼数为素数的充要条件及其他　数学通报, 1983, (3)
[4] 王云葵　等幂和与判别素数的充要条件. 数学通报, 1996, (6)
[5] 柯召, 孙琦　谈谈不定方程　上海教育出版社　1980
[6] 陈景润　关于幂和公式的一般性质　数学研究与评论, 1986, 6 (1)
[7] 王云葵　等幂和的拓广与伯努利数的计算　广西教育学院学报, 1997, (1)
[8] 邓培民, 王云葵　关于伯努利数结构的讨论 (续). 广西师范大学学报, 1996, 14 (4)
[9] 王云葵　伯努利数的通解结构与居加猜想　自然科学基础学科教学与研究, 成都科技大学出版, 1996. 8
[10] 邓培民, 王云葵　关于伯努利数结构的讨论　广西师范大学学报, 1995, 13 (4)
[11] 王云葵　居加猜想研究及其新进展　全国第三届初等数学研究学术交流会议文集, 1996. 8

[责任编辑　黄祖宾]
[责任校对　黄世杰]

Sufficient Conditions for Bernoulli's and Discriminant Prime Number

Wang Yunkui
(*Dept. of Mathematics and Computer Science, Guangxi University for Nationalities, Nanning*, 530006)

Abstract To oblain sufficient conditions for Bernoulli's and discriminant prime number depending on that of the sum of equal power and discriminant prime number. Therefore to debate on the J. JCU Guess with the above result.

Key Words Bernoulli's number　Bernoulli's polynomial　J. JCU Guess　Sum of equal power

联合办刊: 我国期刊发展趋势

1997年10月29日, 广西民族学院、广西右江民族师专、广西电大等院校主管学报的领导聚会南宁, 就协商联办《广西民族学院学报(自然科学版)》召开座谈会. 会上大家就社会转型时期的高校学报如何更新观念, 解放思想, 为高校学报重新定位, 深化学报的改革, 探索新的办刊之路进行了探讨. 大家一致认为: 校与校之间联合办刊, 可以使高校学报扩大稿源, 大大提高刊物质量, 使各校的主要专业、优势学科的科研成果得以突出反映, 强化了学报的特色和优势, 同时促进院校间的科研交流和学科发展, 因此, 大家决定联合办刊. 广西区科委科技期刊管理小组为会议发来了贺信. 贺信说: 走联合办刊之路, 增加稿件来源, 增加办刊实力, 扩大读者群体, 此乃我国期刊发展之趋势.

(黄世杰)

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net